Simulation Refcard - Files d'attentes

1 Système de Kendall

$$\boxed{A \mid S \mid K \mid C \mid P \mid D_s}$$

A : Loi de distribution du temps écoulé entre 2 arrivées consécutives de client
S : Loi de distribution du temps de service d'un client
K : Nb de serveurs
C : Capacité du système (attente + service)
P : Taille de la population
D_s : Discipline de service

Notation abrégée : $\boxed{A \mid S \mid K}$ qui signifie $\boxed{A \mid S \mid K \mid \infty \mid \infty \mid \text{FIFO}}$

1.1 Kendall/A, Kendall/S

Choisis parmis
M : loi exponentielle(processus de poisson)
D : déterministe(cst)
Eq : loi d'Erlang d'ordre q
G : distribution quelconque non négative
...

1.2 Kendall/C

Si $C \neq \infty$ et que le système contient déjà C clients (en attente ou service), tout nouveau client est éliminé

1.3 Kendall/P

Si $P \neq \infty$ les clients circulent généralement en circuit fermé.

1.4 Kendall/DS(discipline)

Discipline de service : FIFO, FILO, SIRO (random order), PS(Processor Sharing), RR(Round Robin), PR(PRopriétaire=priorité)

---

2 Loi exponentielle de param λ

Utilisation : Temps d'attente, durée de vie ; $\boxed{X \sim \exp(\lambda)}$

$$\text{densité : } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad E(x) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$
Abscence de mémoire : $P\{X > s + t | x > t\} = P\{x > s\}$

---

3 Loi de Little

Formule valide pour n'importe quel système stable ;
λ : Taux d'arrivée des clients dans le système
N : Taux moyen de clients dans le système
T : temps moyen de séjour d'un client dans le système
Loi de Little : $\boxed{N = \lambda T}$
$a(t)$: nb clients arrivés sur $[0, t]$
$d(t)$: nb clients partis sur $[0, t]$
$N(t)$: nb clients présents au temps $t = a(t) - d(t)$
$\gamma(t)$: temps total passé par tous les clients dans le système = $\int_0^t N(s)ds$
Taux moyen d'arrivée au temps t : $\lambda_t = \frac{a(t)}{t}$
Nb moyen de clients dans le système sur $[0, t]$: $N_t = \frac{\gamma(t)}{t}$
Temps moyen de séjour d'un client sur $[0, t]$:
Si $t \to \infty$: $N = \lambda T$

---

4 Processus de Poisson

$P\{N(t) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \forall n \in (ensembleN)$;$E(N(t)) = \text{Var}N(t) = \lambda t$;
$P\{X \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ (X est une v.a. de paramètre λ)

---

5 File $M|M|1$

M : Arrivées selon processus de Poisson où $\lambda > 0$
M : Temps de service i.i.d ; $\exp(\mu)$, $\mu > 0$
1 : un serveur
... : Capacité et population infinis ; discipline de service FIFO
$\Pi = (\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \ldots)$: distribution stationnaire du nb de clients dans le système.

$$\text{Si } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu, \text{ on obtient } \begin{cases} \Pi_0 & = 1 - \rho \\ \Pi_i & = 1 - \rho^i \end{cases} \qquad \forall i \in \text{(ensemble N*)}$$

Taux moyen d'occupation du serveur : $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Nb moyen de clients dans le système (attente + service) :
$N = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
Temps moyen de réponse(attente + service) : $T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$ (c.f. Little)
Nb moyen de clients en attente : $N_a = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \rho^2\mu(\mu - \lambda)$
Nb moyen de clients en service : $N_s = \lambda T_s = \frac{\lambda}{\mu} = \rho = 1 - \Pi_0$
Temps d'attente : $T_a = \frac{N_a}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ (c.f. Little)
Temps moyen de service : $T_s = \frac{1}{\mu}$
... : $N = N_a + N_s$; $T = T_a + T_s$

---

6 File $M|M|K$

Arrivées : Processus de Poisson : $P(\lambda)$
Taux d'arrivée : $\lambda_i = \lambda$ (i=Nb clients présents)
Taux de service :

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ k\mu & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

Prob. qu'il y ait Π clients dans le système :

$$\begin{cases} \Pi_0 \frac{(k\rho)^i}{i!} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ \Pi_0 \frac{(\rho^i k^k}{k!} & \text{si } i \geq k \end{cases} \quad \text{où } \Pi_0 = \left[\frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!}\right]^{-1}$$

Taux d'utilisation du serveur : $\rho = \frac{\lambda}{k\mu}$
... : Régime stationnaire seulement si $\rho < 1$
ω =probabilité qu'un client qui arrive doive attendre = prob. que les k serveurs soient occupés.

$$\omega = \sum_{i=k}^{\infty} \Pi_i = \Pi_0 \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)}$$

Nb moyen de clients présents N et en attente N_a :
$N = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\Pi_i = k\rho + \frac{\rho\,\omega}{1-\rho}$ $\qquad N_a = \sum_{i=0}^{\infty}(i-k)\Pi_i = \frac{\rho\,\omega}{1-\rho}$
Nb de clients en train de se faire servir : $N_s = N - N_a = K - \rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Temps de réponse T, d'attente T_a et de service T_s :

$$\begin{aligned} T &= \frac{N}{\lambda} &&= \frac{1}{\mu} + \frac{\omega}{k\mu(1-\rho)} \\ T_a &= \frac{N_a}{\lambda} &&= \frac{\omega}{k\mu(1-\rho)} \\ T_s &= \frac{N_s}{\lambda} &&= \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

---

7 File $M|G|1$

M : Arrivées selon Poisson : $P(\lambda)$
G : distrib. non négative quelconque
Taux moyen d'occupation du serveur : $\rho = \lambda.E(S)$
Condition de stabilité : $\rho < 1$
Distrib. $\Pi_0, \Pi_1, \Pi 2, \ldots$: inconnue sous forme explicite dans le cas général

$N = \rho + \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)}[(E(S))^2 + \text{var}(S)]$
$N_a = N - \rho = \frac{\lambda^2}{2(1-\rho)}[(E(S))^2 + \text{var}(S)]$
$T = \frac{N}{\lambda} = E(S) + \frac{\lambda}{2(1-\rho)}[(E(S))^2 + \text{var}(S)]$
$T_a = \frac{N_a}{\lambda} = \frac{\lambda}{2(1-\rho)}[(E(S))^2 + \text{var}(s)] = T - E(S)$

---

8 File $G|G|1$

Distributions quelconques pour les temps inter-arrivées A et le temps de service S. Cas très difficile à analyser. On ne dispose que d'approximations.

Cond. de stabilité : $\rho = \frac{E(S)}{E(A)} < 1$

Approximations :

$N \simeq \rho + \frac{C_a + C_s}{2} \frac{\rho^2}{1-\rho}$
$N_a \simeq \frac{C_a + C_s}{2} \frac{\rho^2}{1-\rho} = N - \rho$
$T = \frac{N}{\lambda} \simeq E(S) + \frac{C_a + C_s}{2} \frac{\rho E(S)}{1-\rho}$

$T_a \simeq \frac{C_a + C_s}{2} \frac{\rho E(S)}{1-\rho}$
$C_a = \frac{\text{var}(A)}{(E(A))^2}$; $C_s = \frac{\text{var}(S)}{(E(S))^2}$ Remarque : Les approximations N, N_a, T, T_a sont des bornes supérieures.

---

9 ...

Loi d'Erlang : $\gamma(n, \lambda)$; $E(x) = \frac{n}{\lambda}$; var(x)=$\frac{n}{\lambda^2}$

---

10 voc

i.i.d : indépendant et identiquement distribué